Теория возмущения

Лектор: д.ф.м.н., профессор
Темирбеков Н.М.

Пусть имеется неоднородное уравнение

$Au = f$ (9.1)

где A - линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, с областью определения $D(A) \subset H$. Предположим, что задача (9.1) разрешима, т.е. существует обратный оператор A^{-1} на элементах $f \in H$. Наряду с задачей (9.1), которую назовем *невозмущенной,* введем в рассмотрение задачу *возмущенную* где возмущенный оператор имеет ту же область определения $D(A)$, $f_s \subset H$.

$A_\varepsilon = A + \varepsilon\delta A,\ \ f_\varepsilon = f + \varepsilon\delta f,$ (9.3)

где ε - числовой параметр

$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots.$ (9.4)

$(A + \varepsilon\delta A)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots) = f + \varepsilon\delta f.$ (9.5)

$$Au_0 = f,$$

$Au_1 = \delta f - \delta A u_0,$ (9.6)

$$Au_i = -\delta A u_{i-1}, i = 2,3, \dots$$

$u_\varepsilon^{(N)} = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots . + \varepsilon^N u_N,$ (9.7)

то функцию $u_\varepsilon^{(N)}$ называют N — *м приближением к* u_ε .

$A_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i, A_0 = A,$ (9.8)

$$f_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i, f_0 = f,$$

где $A_i: H \to H$ - заданные линейные операторы, $f_i \in H.$

$$Au_0 = f,$$

$$Au_1 = f_1 - A_1 u_0,$$

$Au_2 = f_2 - A_1 u_1 - A_2 u_0,$ (9.9)

……………………………

$$Au_n = f_n - \sum_{k=1}^{n} A_k u_{n-k}$$

$-\frac{d^2u}{dx^2} = f, x \in (0,1),$ (9.10)

$$u(0) = u(1) = 0,$$

где $f \in L_2(0,1)$.

Рассмотрим далее возмущенную задачу

$-\frac{d^2u_\varepsilon}{dx^2} + \varepsilon g(x)u_\varepsilon = f_\varepsilon, x \in (0,1)$ (9.11)

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon(1) = 0,$$

где $f_\varepsilon = f + \varepsilon\delta f,\ \varepsilon \geq 0$. Здесь $\delta f \in L_2(0,1), g$ кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию $g(x) \geq 0$. (9.12)

$$-\frac{d^2u_0}{dx^2} = f, u_0(0) = u_1(1) = 0,$$
$$-\frac{d^2u_1}{dx^2} = \delta f - gu_0, u_1(0) = u_1(1) = 0,$$
$$-\frac{d^2u_i}{dx^2} = -gu_{i-1}, u_i(0) = u_i(1) = 0, i = 2,3, \dots .$$

Тогда решение возмущенной задачи найдем в форме

$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots$. (9.14)

Решение невозмущенной задачи (9.10) записывается в явном виде

$u = x\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f\left(x''\right)dx'' - \int_0^x dx' \int_0^{x'} f\left(x''\right)dx''$. (9.15)

Отсюда без труда можно найти все члены ряда (9.14) вплоть по $n = N$, имея в виду получение решения N-го порядка точности по ε.

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 100x, x \in (0,1), \quad (9.16)$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

а в качестве возмущенной задачи (9.11) возьмем следующую:

$$-\frac{d^2u_\varepsilon}{dx^2} + \varepsilon sin\pi x u_\varepsilon(x) = 100x + \varepsilon 100 sin\pi x, \ \ x \in (0,1), \quad (9.17)$$

$$u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0.$$

Таким образом, здесь $f = 100x, \delta f = 100 sin\pi x, g(x) = sin\pi x$.

Система уравнений (9.13) (для $i = 0,1,2$) в данном случае имеет вид

$$-\frac{d^2u_0}{dx^2} = 100x, \qquad u_0(0) = u_1(1) = 0,$$

$$-\frac{d^2u_1}{dx^2} = 100 sin\pi x - sin\pi x u_0(x), \qquad u_1(0) = u_1(1) = 0,$$

$$-\frac{d^2u_2}{dx^2} = -sin\pi x u_1(x), \quad u_2(0) = u_2(1) = 0, \quad (9.18)$$

$u_\varepsilon{}^{(1)} = u_0 + \varepsilon u_1,\ u_\varepsilon^{(2)} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2.$

$\|u\| \leq \frac{1}{c}\|f\|,$ (9.19)

Где

$\|u\| = \left(\int_0^1 u^2(x)dx\right)^{1/2},\ \|f\| = \left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{1/2}, c = \sqrt{\frac{189}{43}}.$

В самом деле, из (9.15) получаем равенство

$\|u\|^2 =$

$\int_0^1 \left\{x\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f\left(x''\right)dx'' - \int_0^x dx' \int_0^{x'} f\left(x''\right)dx''\right\}^2 dx = I_1 + I_2 + I_3,$ (9.20)

Где

$$I_1 = \int_0^1 x^2 \left(\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f\left(x''\right)dx''\right)^2 dx,$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f\left(x''\right)dx''\right)^2 dx,$$

$I_3 = -2\left(\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f\left(x''\right)dx''\right)\int_0^1 x\left(\int_0^x dx' \int_0^{x'} f\left(x''\right)dx''\right)dx.$

Для I_1 имеем

$$I_1 = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f\left(x''\right) dx''\right)^2 . (9.21)$$

Для I_2 справедливо неравенство

$$I_2 \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f\left(x''\right) dx''\right)^2 + \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\int_0^x dx' \int_0^{x'} f(x'') dx''\right)^2 dx.$$

Поскольку

$$\int_0^1 \left(\int_0^x dx' \int_0^{x'} f(x'') dx''\right)^2 dx \leq \int_0^1 dx \left(\int_0^x \left(\int_0^{x'} dx''\right)^{1/2} \left(\int_0^{x'} f^2(x'') dx''\right)^{1/2} dx'\right)^2 \leq \frac{\|f\|^2}{9},$$

То

$$I_2 \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx''\right)^2 + \frac{\|f\|^2}{27} \quad (9.22)$$

Для I_3 интегрированием по частям получаем

$$I_3 = -2\left(\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx''\right)\left(\frac{1}{2}\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') \mathrm{dx''} - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\left(\int_0^x f(x'') dx''\right) dx\right) =$$

$$-\left(\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx''\right) + \int_0^1 x^2\left(\int_0^x f(x'') dx''\right) dx \cdot \int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'') dx''.$$

$$\int_0^1 x^2\left(\int_0^x f(x'')dx''\right)dx \le \int_0^1 x^2\left(\int_0^x dx''\right)^{1/2}\left(\int_0^x f^2(x'')dx''\right)^{1/2}dx \le \|f\| \int_0^1 x^{5/2}dx = \frac{2}{7}\|f\|,$$

$$\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'')\,dx'' \le \int_0^1\left(\int_0^{x'} dx''\right)^{1/2}\left(\int_0^{x'} f^2(x'')dx''\right)dx' \le \|f\| \int_0^1 (x')^{1/2}dx' = \frac{2}{3}\|f\|,$$

То

$$I_3 \le -\left(\int_0^1 dx' \int_0^{x'} f(x'')dx''\right)^2 + \frac{4}{21}\|f\|^2 \quad (9.23)$$

Подставляя оценки (9.21), (9ю23) в (9.20), получаем

$$\|u\|^2 \le \left(\frac{1}{27} + \frac{4}{21}\right)\|f\|^2 = \frac{43}{189}\|f\|^2,$$

Откуда следует неравенство (9.19).

Аналогичные оценки получаются и для $u_1, u_2, \ldots$ из (9.13)

$$\|u_1\| \le \frac{1}{c}\|\delta f - gu_0\|, \quad (9.24)$$

$$\|u_i\| \le \frac{1}{c}\|gu_{i-1}\|, i = 2,3, \ldots .$$

Поскольку в нашем примере $g = sin\pi x \le 1$, то

$$\|u_i\| \le \frac{1}{c}\|u_{i-1}\|, i = 2,3, \ldots .$$

Отсюда последовательно получим

$$\|u_\varepsilon\| \le \|u_0\| + |\varepsilon|\|u_1\| + c\|u_1\| \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{|\varepsilon|}{c}\right)^n, \quad (9.25)$$

Который сходится при $|\varepsilon| < c$.

Таким образом, достаточным условием сходимости ряда возмущений (9.14) является условие:

$$|\varepsilon| < c, \quad (9.26)$$

Где $c = \sqrt{189/43}$.

Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.